Resolución Parcial Lógica

AVISO: Este documento se entrega sólo a efectos de compartirles cómo se pueden plantear cada uno de los ejercicios. Esto no quiere decir que lo presentado sea la única ni la mejor solución para cada punto, ni que pueda estar exenta de errores involuntarios.

1 Ejercicio 1

1.1 Inciso a

Voy a ver que si una valuación manda todas las variables proposicionales de una fórmula a 1, entonces la fórmula va a ser verdadera, y por lo tanto nunca podré expresar la negación con estos conectivos. Lo veo por inducción en la complejidad de la fórmula.

Caso base: si tengo una fórmula φ de complejidad 0, entonces $\varphi = p$ para alguna variable proposicional, o $\varphi = \top$. Si $\varphi = \top$ segura es verdadera para toda valuación. Si $\varphi = p$ entonces toda valuación tal que $v(p) = 1$ seguro hace verdadera a φ.
Caso inductivo: Sea φ una fórmula de complejidad $n > 0$, mi hipótesis inductiva es que para toda fórmula de complejidad menor a n, si una valuación hace verdadera a todas sus variables proposicionales entonces la fórmula es verdadera. Como φ tiene complejidad $n > 0$, entonces debe ser de la forma $\varphi = \alpha \leftrightarrow \beta$ para ciertos α y β de complejidad menor a n. Entonces por hipótesis inductiva, toda valuación que hace verdadera a todas sus variables proposicionales hace verdad a α, y lo mismo para β. Sea v una valuación que hace verdadera a todas las variables proposicionales de φ, entonces v hace verdad a todas las variables proposicionales de α y de β, entonces por hipótesis inductiva v hace verdaderas tanto a α como a β. Por lo tanto, por definición de $\leftrightarrow$, v hace verdadera a φ.

Entonces la propiedad vale por inducción, y nunca voy a poder expresar la negación con estos conectivos.

1.2 Inciso b

1.2.1 Inciso I

La proposición es **falsa**. Como contraejemplo, tomo φ y ψ dos contradicciones tal que $\varphi \neq \psi$, y tomo $\Gamma_1 = \{\varphi\}$ y $\Gamma_2 = \{\psi\}$. Como φ y ψ son contradicciones, entonces $con(\Gamma_1) = con(\Gamma_2) = FORM$. Sin embargo, como $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \{\varphi, \psi\}$, entonces $con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = FORM$, pero $con(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = TAUT$, porque $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

1.2.2 Inciso II

La proposición es **verdadera**. Supongo que no, que la propiedad no vale. Es decir, existen dos conjuntos Γ_1 y Γ_2 tales que $con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = con(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$, pero $con(\Gamma_1) \neq con(\Gamma_2)$. Esto quiere decir que hay una fórmula φ tal que φ está en uno de los conjuntos, pero no en el otro. Sin pérdida de generalidad, asumo que $\varphi \in con(\Gamma_1)$ y $\varphi \notin con(\Gamma_2)$. Como $\varphi \notin con(\Gamma_2)$, debe existir una valuación v tal que $v \models \Gamma_2$, pero $v \not\models \varphi$. Como $v \models \Gamma_2$, v hace verdaderas a todas las fórmulas de Γ_2, y entonces va a hacer verdaderas a todas las fórmulas de cualquier sobconjunto de Γ_2, en particular $v \models \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Como $v \models \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ pero $v \not\models \varphi$, entonces $\varphi \notin con(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$. Por otro lado, como $\varphi \in con(\Gamma_1)$, entonces $\varphi \in con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, pues $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Por lo tanto $con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \neq con(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$ lo cual es un absurdo, pues por hipótesis $con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = con(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$, que vino de suponer que $con(\Gamma_1) \neq con(\Gamma_2)$.

2 Ejercicio 2

Empiezo distinguiendo al 0 y al 1:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = (\forall y)(x \leq y) \\
&\varphi_1(x) = \neg\varphi_0(x) \wedge (\forall y)(\neg\varphi_0(y) \rightarrow x \leq y)
\end{aligned}$$

Luego me hago una fórmula que me dice si un número es primo:

$$esPrimo(x) = \neg\varphi_0(x) \wedge \neg\varphi_1(x) \wedge (\forall y)(\forall z)(y \leq x \wedge \varphi_0(z) \rightarrow \neg(g(x,y) = z) \vee y = x \vee \varphi_1(y))$$

Esto me dice que x no es 0, no es 1, y que para todo número menor o igual que no sea sí mismo o 1, el resto al dividir a x no es 0. Ahora para distinguir al i-ésimo primo:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x) = esPrimo(x) \wedge (\forall y)(esPrimo(y) \rightarrow x \leq y) \\
&\varphi_i(x) = esPrimo(x) \wedge \bigwedge_{j=1}^{i-1} \neg\varphi_j(x) \wedge (\forall y)(esPrimo(y) \rightarrow \bigvee_{j=1}^{i-1} \varphi_j(y) \vee x \leq y)
\end{aligned}$$

Básicamente estoy diciendo que el i-ésimo primo no es el j-ésimo primo para ningún $j < i$, y que para todo primo, o bien es alguno de los anteriores, o bien es menor al i-ésimo.

3 Ejercicio 3

3.1 Inciso a

$Z \models S_1$ sii para toda valuación v

$$\begin{aligned}
&Z, v \models (\forall x)\neg(x < x) \textit{ sii para todo } a \in \mathbb{Z} \\
&Z, v[x \leftarrow a] \models \neg(x < x) \textit{ sii para todo } a \in \mathbb{Z} \\
&Z, v[x \leftarrow a] \not\models x < x
\end{aligned}$$

y esto último ocurre sii para todo $a \in \mathbb{Z}$ no vale $a < a$, lo cual es cierto en los enteros.
Para S_4, nuevamente tenemos que $Z \models S_4$ sii para toda valuación v

$Z, v \models (\forall x)(\forall y)(\neg(x = y) \to (x < y \vee y < x))$ *sii para todo* $a \in \mathbb{Z}$
$Z, v[x \leftarrow a] \models (\forall y)(\neg(x = y) \to (x < y \vee y < x))$ *sii para todo* $a, b \in \mathbb{Z}$
$Z, v[x \leftarrow a, y \leftarrow b] \models (\neg(x = y) \to (x < y \vee y < x))$ *sii para todo* $a, b \in \mathbb{Z}$
$Z, v[x \leftarrow a, y \leftarrow b] \not\models (\neg(x = y)$ *ó* $Z, v[x \leftarrow a, y \leftarrow b] \models x < y \vee y < x$ *sii para todo* $a, b \in \mathbb{Z}$
$Z, v[x \leftarrow a, y \leftarrow b] \models x = y$ *ó* $Z, v[x \leftarrow a, y \leftarrow b] \models x < y$ *ó* $Z, v[x \leftarrow a, y \leftarrow b] \models y < x$

y esto último ocurre sii para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ vale que $a = b$ ó $a < b$ ó $b < a$, lo cual es trivialmente válido en los enteros.

3.2 Inciso b

Propongo $M =< \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}>$ con $<_{\mathbb{N}}$ el menor usual de los naturales, y $\varphi = (\forall x)(\exists y)(y < x)$. Veamos que esto cumple todo lo que queremos:

1. Veamos que todos los axiomas de SQ_Z son válidos en M:
   - ⋆ Los axiomas de SQ seguro son válidos en M porque SQ es correcto con respecto a la clase de todos los modelos.
   - ⋆ S_1 es válido por un razonamiento análogo al del inciso anterior, la relación de menor es irreflexiva en los naturales.
   - ⋆ La relación de menor es asimétrica en los naturales, por lo que vale S_2.
   - ⋆ La relación de menor también es transitiva en los naturales, por lo que vale S_3.
   - ⋆ Por un razonamiento análogo al inciso anterior vale S_4, si dos números son distintos entonces alguno es menor al otro.
   - ⋆ Todo natural tiene algún número más grande, por ejemplo tomando su sucesor, entonces vale S_5
2. $M \not\models \varphi$, pues para el 0 no hay ningún número menor en los naturales.
3. $Z \models \varphi$, pues para cualquier número siempre puedo encontrar uno menor, por ejemplo el predecesor.

3.3 Inciso c

Suponiendo que SQ_Z es correcto con respecto a Z, no puede ser completo con respecto a Z. Supongamos que lo es. Sabemos que $Z \models \varphi$ con φ la fórmula del inciso anterior, entonces por completitud $SQ_Z \vdash \varphi$, que es equivalente a $\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\} \vdash \varphi$. Ahora, por correctitud, eso implica que $\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\} \models \varphi$. Ahora, en el inciso 3.2 mostramos un modelo M tal

que $M \models \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$, pero $M \not\models \varphi$, y por lo tanto, por definición de consecuencia semántica, $\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\} \not\models \varphi$, lo cual es un absurdo, que vino de suponer que SQ_Z era completo con respecto a Z.

4 Ejercicio 4

4.1 Inciso a

Propongo las siguientes infinitas fórmulas:

$$\varphi_i(x,y) = (\exists z_1...z_i)(todosDistintos_i(z_1...z_i) \wedge \bigwedge_{j=1}^{i}(z_i < y) \wedge \bigwedge_{j=1}^{i} \neg(x < z) \wedge$$
$$\neg(\exists z_{i+1})(\bigwedge_{j=1}^{i}(z_j \neq z_{i+1}) \wedge (z_{i+1} < y) \wedge \neg(x < z_{i+1})))$$

Lo que dice la fórmula φ_i es que existen i elementos distintos menores que y y no menores a x, y además que no existe ningún otro elemento que lo cumpla, es decir, existen exactamente i elementos distintos menores que y y no menores a x. Cabe aclarar que $todosDistintos_i$ son infinitas fórmulas de i variables libres que son satisfechas si todas sus variables libres son distintas.

4.2 Inciso b

Para demostrar que no es expresable la proposición no nos sirven exactamente las fórmulas del inciso anterior, pero si unas parecidas. Lo que voy a usar son fórmulas $\psi(x,y)$ que van a expresar que x es menor a y, y que existen al menos i elementos distintos menores que y y no menores a x, y ya no exactamente i. Esto va a ser necesario ya que con las fórmulas del inciso anterior, nunca vamos a poder encontrar un modelo que satisfaga a todas las φ_i simultáneamente. Mis nuevas ψ_i van a ser entonces:

$$\psi_i(x,y) = x < y \wedge (\exists z_1...z_i)(todosDistintos_i(z_1...z_i) \wedge \bigwedge_{j=1}^{i}(z_i < y) \wedge \bigwedge_{j=1}^{i} \neg(x < z))$$

Supongo entonces que existe una fórmula φ que expresa la proposición. Considero el conjunto $\Gamma = \{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \cup \{\varphi\}$. Voy a intentar llegar a un absurdo viendo que Γ es satisfacible e insatisfacible simultáneamente.

Insatisfacible: Supongo que Γ es satisfacible, esto quiere decir que existe un modelo M y una valuación v tal que $M, v \models \Gamma$. Sean $a, b \in |M|$ tal que $v(x) = a$ y $v(y) = b$. Como $M, v \models \psi_i$ para todo i, entonces $a < b$. Además, como $M, v \models \varphi$, entonces hay una cantidad finita de elementos que son menores a y y no menores a x. Llamemos k a la cantidad de elementos que cumplen eso. En particular, no puede pasar que $M, v \models \psi_{k+1}$, pues ψ_{k+1} nos dice que $a < b$

y que existen al menos $k+1$ elementos distintos menores a y y no menores a x, pero acabamos de decir que existen justo k elementos que cumplen eso, entonces $M, v \not\models \Gamma$, absurdo! que vino de suponer que Γ era satisfacible.

Satisfacible: voy a ver que cualquier subconjunto finito de Γ es satisfacible, y eso por compacidad me va a garantizar que Γ también lo es. Sea entonces $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que Γ_0 es finito. Considero $k = max_i\{\psi_i \in \Gamma_0\} \cup \{1\}$. Propongo el siguiente modelo: $M =< \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}>$ con la relación de menor usual, y tomo v una valuación tal que $v(x) = 0$ y $v(y) = k+2$. Por un lado tengo que $M \models \varphi$ para cualquier valuación, puesto que en los enteros, para cualquier par de elementos $a, b \in \mathbb{Z}$ que tome, vale que si $a < b$ entonces la cantidad de elementos menores que b y no menores que a son finitos. Entonces en particular $M, v \models \varphi$. Por otro lado, tengo que $0 < k+2$ y existen k elementos menores a $k+2$ y no menores a 0, por lo que $M, v \models \psi_i$ para todo $1 \leq i \leq k$. Por lo tanto, $M, v \models \Gamma_0$ (notar que como $M, c \models \varphi$ es indiferente si $\varphi \in \Gamma_0$ o no, el modelo sirve para ambos casos). Como Γ_0 era un subconjunto finito genérico de Γ, probamos que todo subconjunto finito de Γ es satisfacible, y por lo tanto, por compacidad, Γ también lo es.

Llegamos entonces a un absurdo, que Γ es satisfacible e insatisfacible simultáneamente, que vino de suponer que la proposición era expresable.